[This question paper contains 20 printed pages.]

(4) Your Roll No. 2022

Sr. No. of Question Paper : 806 **B**

Unique Paper Code : 12271202

Name of the Paper : Mathematical Methods for Economics II

Name of the Course : **BA (Hons.) Economics**

Semester : II

Duration : 3 Hours Maximum Marks : 75

Deshbandhu College Library
Kalkaji, New Delhi-19

Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. There are **4** questions in all. **All** questions are compulsory.
3. All parts of a question must be answered together.
4. Use of a simple calculator is allowed.
5. Answers may be written either in English or Hindi; but the same medium should be used throughout the paper.

downloaded from StudentSuvidha.com

P.T.O.

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha

छात्रों के लिए निर्देश

1. इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए।
2. कुल **चार** प्रश्न हैं। **सभी** प्रश्न अनिवार्य हैं।
3. प्रत्येक प्रश्न के सभी भागों को एक ही स्थान पर हल कीजिये।
4. साधारण कैलकुलेटर का उपयोग किया जा सकता है।
5. इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिंदी किसी एक भाषा में दीजिए, लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

1. Attempt any **four** of the following : (6×4=24)

(a) (i) Let $Y = 10KL - \sqrt{K} - \sqrt{L}$ and $K = 0.2t + 5$ and $L = 5e^{0.1t}$. Express the rate of change of Y as a weighted sum of the relative rates of change of K and L. Can you attach any economic significance to the weights?

(ii) Let $r = r(x,y)$, $x = x(s,t)$ and $y = y(s,t)$. Given that

$x(1,0) = 2, \quad x_1'(1,0) = -1, \quad x_2'(1,0) = 7,$

$y(0) = 3, \quad y(1) = 0, \quad y'(0) = 3$

$r(2,3) = -1, \quad r_1'(2,3) = 3, \quad r_2'(2,3) = 5$

$r_1'(1,0) = 6, \quad r_2'(1,0) = -2$

Calculate $\frac{\partial r}{\partial t}$ at $s = 1, \ t = 0$.

(b) Given $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$.

(i) At (1,0), in what direction does f increase most rapidly? What is the rate of change in f in that direction?

(ii) Find an approximate value for f(1.01,0.02). How large is the error caused by this approximation?

(c) (i) Given $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \ldots x_n$. Is f homogenous? Is it homothetic? Are the first order partial derivatives of the function homogenous and if yes of what degree? Show that $Vf = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right)$.

(ii) Suppose that f(x, y) is homogenous of degree ho 2 with $f_1'(2,3) = 4$ and $f_2'(4,6) = 12$. Find f(6,9).

P.T.O.

downloaded from StudentSuvidha.com

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha

(d) The following system of equations defines $u = u(x,y)$ and $v = v(x,y)$ as differentiable functions of x and y around the point $P = (x, y, u, v) = (1,1,1,0)$:

$$(u + 2v)^5 + xy^2 = 2u - yv$$

$$(1 + u^2)^3 - z^2v = 8x + y^5w^2$$

Differentiate the system and find the values of u'_x, u'_y, v'_x and v'_y.

(e) (i) For the function, $f(x,y,z) = \frac{zx}{(x+y^2)}$,

determine whether the function f increases or decreases at a specified point $P_0 = (1,1,1)$ when one variable increases, while the others are fixed.

(ii) Assume that the equation $e^{xy^2} - 2x - 4y = c$ implicitly defines y as a differentiable function of x. Find a value of the constant c such that $f(0) = 1$ and find the slope and the equation of the tangent at the point $(x, y) = (0,1)$.

निम्नलिखित में से किन्हीं **चार** के उत्तर दीजिये :

(क) (i) मान लीजिये $Y = 10KL - \sqrt{K} - \sqrt{L}$ तथा $K = 0.2t + 5$ और $L = 5e^{0.1t}$. Y में परिवर्तन की दर को K और L की परिवर्तन की सापेक्ष दरों के भारित योग के रूप में व्यक्त करें। क्या आप इसके लिए कोई आर्थिक महत्त्व दिखा सकते हैं?

(ii) माना कि $r = r(x,y)$, $x = x(s, t)$ तथा $y = y(t)$ । दिया हुआ है :

$$x(1,0) = 2, \quad x'_1(1,0) = -1, \quad x'_2(1,0) = 7,$$

$$y(0) = 3, \quad y(1) = 0, \quad y'(0) = 4$$

$$r(2,3) = -1, \quad r'_1(2,3) = 3, \quad r'_2(2,3) = 5$$

$$r'_1(1,0) = 6, \quad r'_2(1,0) = -2$$

$\frac{\partial r}{\partial t}$ at $s = 1$, $t = 0$ की गणना कीजिये ।

(ख) आपको दिया गया फलन : $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ ।

(i) फलन f सबसे तेजी से (1,0) पर किस दिशा में बढ़ता है? उस दिशा में f में परिवर्तन की दर क्या है?

P.T.O.

downloaded from StudentSuvidha.com

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha

(ii) $f(1.01, 0.02)$ के लिए अनुमानित मान ज्ञात कीजिये। इस समीकरण के कारण हुई त्रुटि कितनी बड़ी है?

(ग) (i) दिया गया $f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 .... x_n$ क्या f समरूप (होमोजीनियस) है? क्या ये समरूप (होमोथेटिक) है? क्या f के प्रथम कोटि आंशिक अवकलज (पार्शियल डेरिवेटिव्स) सजातीय फलन (होमोजीनियस फंक्शन) हैं और यदि हाँ तो किस अंश (डिग्री) के हैं?

$$\nabla f = f(x_1, x_2, ..., x_n)\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2} \cdots, \frac{1}{x_n}\right)$$ दिखाएँ।

(ii) मान लीजिये कि $f(x, y)$ डिग्री 2 का समरूप है तथा $f_1'(2,3) = 4$ और $f_2'(4,6) = 12$ तो $f(6,9)$ ज्ञात करें।

(घ) निम्नलिखित समीकरणों की प्रणाली $u = u(x,y)$ और $v = v(x,y)$ जो कि बिंदु $P = (x, y, u, v) = (1,1,1,0)$ के आसपास x और y के अवकलनीय (डिफ्रेंशियेबल) फलन के रूप में परिभाषित करती है।

$$(u + 2v)^5 + xy^2 = 2u - yv$$

$$(1 + u^2)^3 - z^2v = 8x + y^5w^2$$

प्रणाली को डिफ्रेंशियेट करें तथा u_x', u_y', v_x' तथा v_y' का मान ज्ञात करें।

(ङ) (i) दिए गए फलन $f(x,y,z) = \frac{zx}{(x+y^2)}$, के लिए निर्धारित करें कि फलन एक निर्दिष्ट बिंदु $P_0 = (1,1,1)$ पर बढ़ता है या घटता है, जब एक चर बढ़ता है, जबकि अन्य स्थिर होते हैं।

(ii) माना कि समीकरण $e^{xy^2} - 2x - 4y = c$ परोक्ष (इम्प्लिसिटली) रूप से y को x के एक अवकलनीय (डिफ्रेंशियेबल) फलन के रूप में परिभाषित करता है। जब $f(0) = 1$ दिया हुआ है तो स्थिरांक c का मान ज्ञात कीजिये तथा बिंदु $(x, y) = (0,1)$ पर स्पर्शरेखा (टेनजेंट) का ढलान (स्लोप) और समीकरण ज्ञात कीजिये।

2. Attempt **any four** of the following : (7×4=28)

(a) Consider the function $f(x,y) = x^2 - y^2 - xy - x^3$. Find and classify its critical points. Find the domain S where f is concave and find the largest value of f in S.

P.T.O.

downloaded from StudentSuvidha.com

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha

(b) State the necessary conditions for the solution of the utility maximization problem, $U(x,y)=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2$ for general values of p_x, p_y and M. Find the optimal values of x, y and the corresponding value of λ (the langrange multiplier). What are the consumer's demand functions for x and y? Find the indirect utility function $U^*(p_x, p_y, M)$ and verify that

$$\lambda=\frac{\partial U^*}{\partial M}.$$

(c) Find the extreme points and extreme values for $f(x, y) = xe^y - x^2 - e^y$ on the domain defined by $0 \le x \le 2$ and $0 \le y \le 1$.

(d) The function f(x, y) is such that

Firstly, $f'_x > 0$, $f'_y > 0$;

Secondly, $f''_{xx} < 0$, $f''_{yy} < 0$; and

Thirdly the level curve $y = g(x)$ is defined implicitly by $f(x, y) = c$ where c is a constant. The function f is such that all level curves are strictly convex.

Let F be a differentiable and strictly increasing function of one variable. Which of the above mentioned three properties are preserved for the function $W(x, y) = F(f(x, y))$?

(e) Let $f(x, y) = (x^2 - \alpha xy)e^y$ be a function of two variables with α as a constant and $\alpha \neq 0$.

(i) Find the critical points of f and decide for each of them if it is a local maximum point, local minimum point or a saddle point.

(ii) Let (x^*,y^*) be the critical point where $x^* \neq 0$ and let $f^*(\alpha) = f(x^*,y^*)$. Find $\frac{df^*(\alpha)}{d\alpha}$ and show that if we define $\hat{f}(x,y,\alpha)=\left(x^2-\alpha xy\right)e^y$ then $\frac{\partial \hat{f}\left(x^*,y^*,\alpha\right)}{\partial \alpha}=\frac{df^*(\alpha)}{d\alpha}$.

P.T.O.

downloaded from StudentSuvidha.com

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha

निम्नलिखित में से किन्हीं **चार** के उत्तर दीजिये :

(क) दिए गए फलन (फंक्शन) $f(x,y) = x^2 - y^2 - xy - x^3$ के महत्वपूर्ण बिन्दुओं को खोजें और वर्गीकृत करें। डोमेन S ज्ञात कीजिये जहाँ f अवतल है। S डोमेन में f का सबसे बड़ा मान ज्ञात कीजिये।

(ख) उपयोगिता अधिकतमकरण समस्या (मैक्सीमाइज प्रॉब्लम)

$U(x,y)=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2$ के समाधान के लिए आवश्यक शर्तें बताएं, p_x, p_y और M के सामान्य मूल्यों के लिए। x, y के अधिकतम मान और λ (लैंगरेंज मल्टीप्लायर) के संगत मान का पता लगाएं। x और y के लिए उपभोक्ता की मांग का फलन क्या है? अप्रत्यक्ष उपयोगिता फलन $U^*(p_x, p_y, M)$ ज्ञात कीजिये

तथा सत्यापित कीजिये कि $\lambda = \frac{\partial U^*}{\partial M}$।

(ग) दिए गए फलन $f(x, y) = xe^y - x^2 - e^y$ के लिए चरम बिंदु और चरम मान खोजें जब पारस (डोमेन) $0 \le x \le 2$ और $0 \le y \le 1$ दिया गया है।

(घ) दिया गया फलन $f(x, y)$ इस प्रका

प्रथमत: $f'_x > 0$, $f'_y > 0$;

उसके बाद, $f''_{xx} < 0$, $f''_{yy} < 0$; त

अंतत: $y = g(x)$ को $f(x, y) = c$ किया गया है जहाँ c एक स्थिरांक सभी वक्र स्तर पूर्णरूप से उत्तर हैं।

मान लीजिए F एक अवकलनीय और ए हुआ फलन है। उपरोक्त तीनों गुणों मे फलन $W(x, y) = F(f(x, y))$ के

(ङ) मान लीजिए दो चर का एक फलन f दिया गया है जिसमें α स्थिर है तथा

(i) दिए गए फलन f के क्रिटिक उसमें से प्रत्येक के लिए निर्णय स्थानीय अधिकतम बिंदु, स्थानी बिंदु है।

(ii) मान लीजिये (x^*,y^*) क्रिटिव

और माना कि $f^*(\alpha) = f($

downloaded from StudentSuvidha.com

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha

ज्ञात कीजिए और दिखाएँ यदि हम

$\hat{f}(x,y,\alpha)=\left(x^2-\alpha xy\right)e^y$ को परिभाषित करते हैं

तो $\frac{\partial \hat{f}\left(x^*,y^*,\alpha\right)}{\partial \alpha}=\frac{df^*(\alpha)}{d\alpha}$ दिखायें।

3. Attempt **any one** of the following : (7×1=7)

(a) To feed his stock a farmer can purchase two kinds of feed. The farmer has determined that the herd requires 60, 84, and 72 units of the nutritional elements A, B, and C, respectively, per day. The contents and cost of a kilogram of each of the two feeds are given in the following table :

	Nutritional Elements (units per kg)			
	A	B	C	Cost (Rs. per kg)
Feed 1	3	7	3	100
Feed 2	2	2	6	40

(i) The farmer wants to d
expensive way of providi
by combining the two fee
linear programming pro
minimal-cost diet.

(ii) Does the optimal solution
of Feed 1 increases from
140 Rs per kg, with all oth

(b) (i) Solve the following probl

max $3x + 4y$ subject to

$x \geq 0,\ y \geq 0$

(ii) Compute the increase in t
if the first constraint cha

(iii) Compute the increase
function if the second c
$x + 4y \leq 5$.

downloaded from StudentSuvidha.com

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha

(iv) Prove using (ii) and (iii) that if (x, y) is feasible in the original problem then the criterion function can never be larger than the optimal value of the criterion function obtained in (i).

निम्नलिखित में से किन्हीं **एक** का उत्तर दीजिए :

(क) एक किसान अपने स्टॉक को भरने के लिए दो प्रकार का चारा (फीड) खरीद सकता है। किसान ने निर्धारित किया है कि पशु समूह को प्रतिदिन क्रमशः पोषक तत्वों A की 60 यूनिट, B की 84 यूनिट और C की 72 यूनिट की आवश्यकता होती है। दो प्रकार के चारे की प्रति किलोग्राम लागत और सामग्री निम्नलिखित तालिका में दी गई है :

	पोषक तत्व (यूनिट प्रति किलो)			
	A	B	C	लागत (रूपये प्रति किलो)
चारा 1	3	7	3	100
चारा 2	2	2	6	40

(i) किसान दो चारे को मिलाकर पर्या
सबसे कम खर्चीला तरीका निर्धा
एक रैखिक प्रोग्रामिंग (लीनियर
में दिखाएँ और न्यूनतम लागत
करें।

(ii) यदि चारा 1 की कीमत 100 रुपये
140 रूपये प्रति किलोग्राम हो जा
अपरिवर्तित रहते हैं, तो क्या इ
सोल्यूशन) बदलता है?

(ख) (i) निम्नलिखित समस्या (प्रॉब्लम) क

अधिकतम (मैक्स) $3x + 4y$ य

$x \geq 0, \ y \geq 0$

(ii) यदि पहली बाधा (कंस्ट्रेंट्स) $3x$
है तो मानदंड (क्राइटेरियन) फलन

(iii) यदि दूसरी बाधा (कंस्ट्रेंट्स) x +
है तो मानदंड (क्राइटेरियन) फलन

downloaded from StudentSuvidha.com

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha

(iv) यदि (x, y) मूल समस्या में संभव है तो मानदंड फलन (क्राइटेरियन फंक्शन) कभी भी (i) में प्राप्त मानदंड फलन (क्राईटेरियन फंक्शन) के इष्टतम मान से बड़ा नहीं हो सकता है, इसे (ii) और (iii) का उपयोग करके सिद्ध करें।

4. Attempt **any two** of the following : (8×2=16)

(a) (i) Find the area of the region between the curves: $y_1 = 3x^2 - 6x + 8$ and $y_2 = -2x^2 + 4x + 1$ from $x = 0$ to $x = 2$.

(ii) Show that $y(t) = 2e^{6t} + 1$ is the solution to the differential equation $\frac{dy}{dt} = 6y - 6$ where $y(0) = 3$. Does $y(t)$ converge to a steady state? (4,4)

(b) (i) Let the rate of investment be given by the function, $I(t) = 12t^{1/3}$. If $K(0) = 25$, find the time path of capital stock. Find the amount of capital accumulation during the time interval [1,3].

(ii) The demand and supp
market for a commodit

$Q_{dt} = 4 - P_t$.

$Q_{st} = 1 + 0.5P_{t-1}$

Q_{dt} and Q_{st} are the qu
quantity supplied of the
and P_t represents the pr
Find the expression for
the equilibrium. Solve
difference equation. Is t
oscillatory/non-oscillato
divergent? Illustrate usi
$P_0 = 1$.

(c) (i) Find the general solutio
equation $\dot{P} = \delta[D(P) -$
and $D(P) = a - bP$ giv
commodity and $S(P) =$
supply. a, b, α and β are
Determine the equilibriu
whether it is stable.

downloaded from StudentSuvidha.com

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha

(ii) Given that :

$$C_t = 90 + 0.8y_{t-1}$$

$$I_t = 50$$

$$Y_0 = 1200$$

Y_t, C_t and I_t are the national income, consumption and investment at time t. Find the time path of national income, Y_t. Comment on the stability of the time path. (4,4)

निम्नलिखित में से किन्हीं **दो** के उत्तर दीजिये :

(क) (i) वक्रों : $y_1 = 3x^2 - 6x + 8$ और $y_2 = -2x^2 + 4x + 1$ के बीच, $x = 0$ से $x = 2$, तक के क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

(ii) सिद्ध करें कि $y(t) = 2e^{6t} + 1$ अंतर समीकरण (डिफरेंशियल इकवेशन) $\frac{dy}{dt} = 6y - 6$ जहाँ $y(0) = 3$ का समाधान है । क्या $y(t)$ स्थिर (स्टेडी) अवस्था में परिवर्तित (कन्वर्ज) होता है ?

(ख) (i) मान लीजिये निवेश की दर फलन (
द्वारा दी गई है। यदि $K(0) = 25$ है
समय पथ (टाइम पाथ) ज्ञात कीजिए ।
के दौरान पूंजी संचय की मात्रा ज्ञात

(ii) किसी वस्तु के लिए बाजार में मांग
(सप्लाई) फलन दिए गए हैं :

$$Q_{dt} = 4 - P_t.$$

$$Q_{st} = 1 + 0.5P_{t-1}$$

Q_{dt} और Q_{st} समय t पर वस्तु की मात्रा है, तथा P_t, वस्तु की कीमत संतुलन में P_t के लिए व्यंजक P_{t-} ज्ञात कीजिए । सम्बन्धित (कोरस्पो (डिफरेंस इकवेशन) को हल कीजिए पथ (टाइम पाथ) मूल्य दोलन (ओस्ले ओस्लेट्री) और अभिसरण (कन्वेर्जेट) है ? एक ग्राफ का उपयोग करके चि विचार करें ।

downloaded from StudentSuvidha.com

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha

(ग) (i) अंतर समीकरण (डिफरेंशियल इकवेशन) $\dot{P} = \delta[D(P) - S(P)]$ का सामान्य समाधान ज्ञात करें जहाँ $\delta > 0$ तथा एक वस्तु की मांग (डिमांड) $D(P) = a - bP$ और $S(P) = \alpha + \beta P$ आपूर्ति है. a, b, α और β सकारात्मक स्थिरांक (कानस्टंट्स) हैं। संतुलित स्थिति निर्धारित करें और जांचें कि क्या वह स्थिर है।

(ii) दिया गया है :

$$C_t = 90 + 0.8y_{t-1}$$

$$I_t = 50$$

$$Y_0 = 1200$$

Y_t, C_t और I_t समय t पर राष्ट्रीय आय, खपत और निवेश हैं। राष्ट्रीय आय Y_t का समय पथ ज्ञात कीजिये। समय पथ (टाइम पथ) की स्थिरता पर टिप्पणी कीजिए।

downloaded from StudentSuvidha.com

Deshbandhu College Library
Kalkaji, New Delhi-19

Download all NOTES and PAPERS at StudentSuvidha